ŘEŠENÍ

Cvičení 1. 1. Označme

$$X_i := \mathbf{1}\{\text{v i-tém hodu padl rub}\}, \quad i = 1, ..., 100.$$

Pak $X_1, ...X_{100}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $Alt(1/2)$. Z toho $\mathbb{E}X_i = 1/2$ a $\text{var}X_i = 1/4 \in (0, \infty)$.

2. Zajímá nás $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60)$.

3. Označíme-li $Z := \sum_{i=1}^{100} X_i$, pak $Z \sim Bi(100, 1/2)$, a tedy můžeme spočítat pravděpodobnost z druhého kroku přesně jako

$$\mathbb{P}(Z > 60) = 1 - \sum_{k=0}^{60} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = 0.0176.$$

Protože $\text{var}X_i \in (0, \infty)$, můžeme k výpočtu použít i centrální limitní větu, tj.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 60\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{5} \leq 2\right) \approx 1 - \Phi(2) = 0.023$$

Cvičení 2. 1. Označme

$$X_i := \text{životnost i-té žárovky}.$$

Pak $X_1, X_2, ...$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $Exp(1/10)$. Tedy $\mathbb{E}X_i = 10$ a $\text{var}X_i = 100 \in (0, \infty)$.

2. Řešíme nerovnici v proměnné n=počet žárovek, tj. hledáme $n \in \mathbb{N}$, pro která

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 600\right) > 0.95.$$

3. Protože $\text{var}X_i \in (0, \infty)$, můžeme k výpočtu použít centrální limitní větu. Ekvivalentními úpravami dostaneme, že nerovnost v bodě 2 platí právě když

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 10n}{10\sqrt{n}} \leq \frac{600 - 10n}{10\sqrt{n}}\right) < 0.05$$

Z centrální limitní věty dostaneme, že je to téměř to samé, jako řešit nerovnici

$$\frac{600 - 10n}{10\sqrt{n}} < \Phi^{-1}(0.05) = -1.645.$$

Tato nerovnost platí pro všechna $n > 74.2$, tj. pro $n > 75$. Potřebujeme alespoň 75 žárovek.

Cvičení 3. (a)

1. Označme

$$X_i := \text{počet chlebíčků, které snědl i-tý host}, \quad i = 1, ..., 100.$$

Pak $X_1, X_2, ...$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením se střední hodnotou $\mathbb{E}X_i = 5$ a rozptylem $\text{var}X_i = 1 \in (0, \infty)$.

2. Zajímá nás

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 490\right).$$

3. Protože var$X_i \in (0,\infty)$, můžeme k výpočtu použít centrální limitní větu, tj.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 60\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 500}{10} \leq -1\right) \approx \Phi(-1) = 0.159$$

(b) Řešíme nerovnici v proměnné x=počet chlebíčků, tj. hledáme $x \in \mathbb{N}$, pro která

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > x\right) < 0.1.$$

Ekvivalentními úpravami dostaneme, že tato nerovnost platí právě když

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 500}{10} \leq \frac{x-500}{10}\right) \geq 0.9$$

Z centrální limitní věty dostaneme, že je to téměř to samé, jako řešit nerovnici

$$\frac{x-500}{10} \geq \Phi^{-1}(0.9) = 1.282.$$

Tato nerovnost platí pro všechna $x \geq 512.82$, tj. pro $x \geq 513$. Potřebujeme objednat alespoň 513 chlebíčků.

(c) Řešíme nerovnici pro n=počet hostů

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 500\right) \geq 0.95.$$

Za použití centrální limitní věty dojdeme k nerovnici

$$\frac{500-5n}{\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.645,$$

a následně k výsledku $n \leq 96$. Může přijít nejvýše 96 hostů.

výsledku

Cvičení 4. Označme

$$X_i := \{\text{i-tá osoba zemřela}\}, \quad i = 1, ..., 1000.$$

Pak $X_1, ..., X_{1000}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $Alt(0.01)$, a tedy $\mathbb{E}X_i = 0.01$ a var$X_i = 0.0099 \in (0,\infty)$.

(a) Dále označme

$$Z := 1200000 - 80000 \sum_{i=1}^{1000} X_i.$$

Náhodná veličina Z určuje roční zisk pojišťovny. Očekávaný zisk je tedy

$$\mathbb{E}Z = 400000.$$

(b) Pojišťovna utrpí ztrátu právě když $Z < 0$. To nastane právě když $\sum_{i=1}^{1000} X_i > 15$. Protože var$X_i \in (0,\infty)$, můžeme použít na výpočet pravděpodobnosti ztráty centrální limitní větu

$$\mathbb{P}(Z<0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > 15\right) \approx \Phi(1.589) \approx 0.945.$$

(c) Zde je zisk pojišťovny náhodná veličina tvaru $Z = 1000x - 80000\sum_{i=1}^{1000} X_i$. Řešíme nerovnici v proměnné x=měsíční výše pojistného

$$\mathbb{P}(Z<0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > \frac{x}{80}\right) < 0.01$$

Použitím centrální limitní věty dostaneme, že $x \geq 1385.5$. Výše pojistného by měla být alespoň 1385.5 Kč.